



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 08.02.2025
CLASA a 11-a

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Problema 1 (autor Cristi Săvescu, SGM, nr. 9/2024)

Fie $a \in (0, \infty)$. Calculați, în funcție de a , $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left\{ a \cdot \frac{n+1}{n} \right\} + \left\{ a \cdot \frac{n}{n+1} \right\} \right)$, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a numărului real x .

Detalii rezolvare	Barem asociat
$x_n = \left\{ a \frac{n+1}{n} \right\} + \left\{ a \frac{n}{n+1} \right\} = a \frac{n+1}{n} + a \frac{n}{n+1} - \left[a \frac{n+1}{n} \right] - \left[a \frac{n}{n+1} \right], n \geq 1$	1p
$\lim_{n \rightarrow \infty} a \frac{n+1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a \frac{n}{n+1} = a$	1p
Dacă $a \notin \mathbb{N}^*$, atunci există $p \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $a \frac{n+1}{n}$ și $a \frac{n}{n+1}$ aparțin intervalului $([a], [a] + 1)$ pentru orice $n \geq p$, deci $\left[a \cdot \frac{n+1}{n} \right] = \left[a \cdot \frac{n}{n+1} \right] = [a]$ pentru orice $n \geq p$. Obținem $x_n = a \cdot \frac{n+1}{n} + a \cdot \frac{n}{n+1} - 2[a]$ pentru orice $n \geq p$, deci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2(a - [a]) = 2\{a\}$	3p
Dacă $a \in \mathbb{N}^*$, atunci $a \leq a \frac{n+1}{n} < a+1$ și $a-1 \leq a \frac{n}{n+1} < a$, pentru orice $n > a$, deci $\left[a \frac{n+1}{n} \right] = a$ și $\left[a \frac{n}{n+1} \right] = a-1$ pentru orice $n > a$. Obținem $x_n = a \frac{n+1}{n} + a \frac{n}{n+1} - 2a + 1$ pentru orice $n > a$, deci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$	2p

Problema 2 (autor Marian Andronache)

Fie $A \in M_2(\mathbb{C})$ cu $\det(A) = 1$ și cu proprietatea că pentru orice $B \in M_2(\mathbb{C})$ există $k \in \mathbb{N}^*$ (care depinde de B) astfel încât $A^k B = B A^k$. Arătați că există $p \in \mathbb{N}^*$ cu $A^p = I_2$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
Din teorema Hamilton -Cayley rezultă, inductiv, că pentru fiecare $k \in \mathbb{N}^*$ există $a_k, b_k \in \mathbb{C}$ astfel încât $A^k = a_k A + b_k I_2$	1p
Dacă $a_k \neq 0$ pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$, fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Cum există $k \in \mathbb{N}^*$ cu $A^k X = X A^k$, obținem $(a_k A + b_k I_2) X = X(a_k A + b_k I_2)$, deci $AX = XA$. Rezultă $\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, deci $b = c = 0$	2p
Din $AY = YA$ obținem $a = d$, deci $A = aI_2$	1p
Cum $1 = \det(A) = a^2$, rezultă $A^2 = I_2$	1p
Dacă există $k \in \mathbb{N}^*$ cu $a_k = 0$, atunci $A^k = b_k I_2$ și, cum $1 = \det^k(A) = \det(A^k) = \det(b_k I_2) = b_k^2$, rezultă $A^{2k} = I_2$.	2p

Problema 3 (autor Marian Andronache)

Se consideră șirul convergent $(x_n)_{n \geq 0}$ cu $x_0 \in \mathbb{R}$ și $x_{n+1} = x_n^2 - 6$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$. Arătați că există $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $x_n = x_k$, oricare ar fi $n \geq k$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
Fie $l = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in \mathbb{R}$. Din relația de recurență rezultă $l^2 - l - 6 = 0$, deci $l \in \{-2, 3\}$.	1p
Presupunem că $x_{n+1} \neq x_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Cum $x_{n+1} - x_n = x_n^2 - x_{n-1}^2 = (x_n - x_{n-1})(x_n + x_{n-1})$, obținem $ x_{n+1} - x_n = x_n - x_{n-1} x_n + x_{n-1} $, $n \geq 1$.	1p
Cum șirul $(x_n + x_{n-1})_{n \geq 1}$ este convergent către 4 sau 6, rezultă că există $p \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $ x_n + x_{n-1} \geq 3$, pentru orice $n \geq p$, deci $ x_{n+1} - x_n \geq 3 x_n - x_{n-1} $ pentru orice $n \geq p$.	3p

Prin înmulțirea acestor inegalități obținem $ x_{n+1} - x_n \geq 3^{n-p+1} x_p - x_{p-1} $ pentru orice $n \geq p$.	
Cum $ x_p - x_{p-1} > 0$, rezultă că $\lim_{x \rightarrow \infty} x_{n+1} - x_n = \infty$, fals, pentru că $\lim_{x \rightarrow \infty} x_{n+1} - x_n = 0$.	1p
Rezultă că există $k \in \mathbb{N}$ cu $x_{k+1} = x_k$, deci $x_n = x_k$, oricare ar fi $n \geq k$	1p

Problema 4 (autor Flavian Georgescu)

Fie $A, B, C, D \in M_2(\mathbb{C})$ cu $\text{tr}(A) = \text{tr}(B) = \text{tr}(C) = \text{tr}(D) \neq 0$ și $A^3 + B^3 = C^3 + D^3$.

- Arătați că $\det(A) + \det(B) = \det(C) + \det(D)$
- Arătați că $(A - B)^2 = (C - D)^2$ dacă și numai dacă $\det(A + B) = \det(C + D)$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) Notăm cu t urma celor patru matrice. Din teorema Hamilton-Cayley rezultă $A^3 = tA^2 - \det(A) \cdot A = t(tA - \det(A) \cdot I_2) - \det(A) \cdot A = (t^2 - \det(A))A - t \det(A) \cdot I_2$, deci $\text{tr}(A^3) = t^3 - 3t \det(A)$ și relațiile similare pentru matricele B, C și D .	2p
Cum $\text{tr}(A^3) + \text{tr}(B^3) = \text{tr}(A^3 + B^3) = \text{tr}(C^3 + D^3) = \text{tr}(C^3) + \text{tr}(D^3)$ și $t \neq 0$, rezultă $\det(A) + \det(B) = \det(C) + \det(D)$.	2p
b) Cum $\text{tr}(A - B) = \text{tr}(C - D) = 0$, rezultă că $(A - B)^2 = \det(A - B) \cdot I_2$ și $(C - D)^2 = \det(C - D) \cdot I_2$, deci $(A - B)^2 = (C - D)^2 \Leftrightarrow \det(A - B) = \det(C - D)$. Cum $\det(A + B) + \det(A - B) = 2(\det(A) + \det(B)) = 2(\det(C) + \det(D)) = \det(C + D) + \det(C - D)$, rezultă că $\det(A - B) = \det(C - D) \Leftrightarrow \det(A + B) = \det(C + D)$, si de aici concluzia.	3p